Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Buenos Aires
Departamento de ciencias básicas

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Teóricos de la materia para Final

Pose, Fernando
Fep.utn@gmail.com

APUNTE NO OFICIAL

Para obtener la versión completa (Teóricos + Teoría + Ejercicios resueltos o para realizar sugerencias, críticas o preguntas sobre el material: fep.utn@gmail.com

(Actualizada al 16-07-14)

ECUACIONES DIFERENCIABLES ORDINARIAS DEFINICIONES

Ecuación diferencial ordinaria: Es aquella donde existe una única variable independiente.

Soluciones de una ecuación diferencial:

- Solución general (S.G): Es una relación entre las variables que satisface a la ecuación y contiene n constantes arbitrarias esenciales.
- Solución particular (S.P): Es toda solución que se obtiene de la general dándole a las constantes valores determinados
- Solución singular (S.S): Es toda solución de la ecuación diferencial que no está incluida en la solución general. (No puede obtenerse de ella dando valores determinados a las constantes.

TRAYECTORIAS ORTOGONALES

Dadas dos familias de curvas F_1 y F_2 se dice que son ortogonales cuando por cada punto por el que pasa una curva de F_1 también pasa una curva de F_2 y ambas curvas son ortogonales en dicho punto. (Rectas tangentes perpendiculares entre sí)

CONJUNTO DE NIVEL DE UN CAMPO ESCALAR

Sea $f: D \underline{c} R^2 \to R$, un campo escalar se denomina conjunto de nivel "k" de f al conjunto de todos los $\overline{X} \in D$ tales que $f(\overline{X}) = k$ constante, donde k es un numero que pertenece al conjunto imagen de f.
Si denotamos L(k) al conjunto de nivel de f correspondiente a un número real k resulta:

$$\boxed{L(k) = \{(x,y) \in Df / f(x,y) = K\} \quad \text{con } k \in IF}$$

IMPORTANTE:

$$\boxed{\boxed{L(k) \underline{c} Df}}$$

Observación:

Si el campo escalar es de dos variables independientes, cada conjunto de nivel en general es una curva de nivel (INCLUIDA EN EL DOMINIO) Mientras que si el campo escalar es de tres variables independientes, cada conjunto de nivel en general es una superficie de nivel incluida en el dominio del campo.

TEOREMA: LIMITE EN FUNCIONES VECTORIALES

Cuando $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ $\exists \lim_{x \to A} \bar{f}_{(x)} = \bar{L} <=> \exists \lim_{x \to A} \bar{f}_{i(x)} = L_i$ con $i = 1,2, \dots, n$
Siendo $\bar{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n)$

LIMITES ITERADOS O SUCESIVOS

Los límites iterados nos proporcionan información de la NO EXISTENCIA del límite, lo que quiere decir que no se puede demostrar la existencia o hallar el valor del mismo.
Sea un campo escalar: $z = f(x, y)$ cuando(x,y) tiende a $A = (X_0, Y_0)$ se definen a los limites iterados como:

$$(1) \lim_{X \to X_0} \left[\lim_{Y \to Y_0} f(x, y) \right] \quad y \quad (2) \lim_{Y \to Y_0} \left[\lim_{X \to X_0} f(x, y) \right]$$

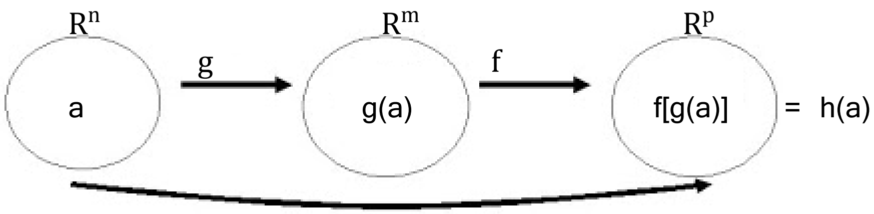
Entonces:

- Si tanto para (1) como para (2) el límite existe y da distinto se tiene que NO existe el límite.
- Si tanto para (1) como para (2) el límite existe y da igual los límites iterados NO proporcionan información.

Teorema Continuidad en Funciones Vectoriales

Cuando $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\bar{f}$ es continua en A <=> $\bar{f}_n$ es continua en A.
Para $i = 1,2, \dots, n$

Para una composición de funciones:



$$h = f_o g$$

Si g es continua en A y f es continua en g(a)
entonces $h = f_o g$ es continua en A

Derivada direccional de un campo escalar

Sea f un campo escalar definido en un conjunto abierto $D \subseteq R^n$, $\overline{X_0} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ es un punto de D y donde $\breve{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ es un versor de R^n, la derivada direccional de f en $\overline{X_0}$ con respecto al versor $\breve{u}$ esta dada por el siguiente límite:

$$\boxed{f'(\overline{X}_0, \breve{u}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{X}_0 + h\breve{u}) - f(\overline{X}_0)}{h}}$$

Donde:

$\breve{u}$ es un vector unitario (versor)
$\breve{u} = (a, b)$ $\qquad a^2 + b^2 = 1$

DERIVADA PARCIALES

Sea $f: D\underline{c}R^2 \rightarrow R/z = f(x, y)$ y sea $\overline{P}_0 = (x_0, y_0)$ interior a D; las derivadas parciales de f(x,y) en (x_0, y_0)):

$$f'x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha; y_0) - f(\overline{X}_0)}{h}$$

$$f'y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + hb) - f(\overline{X}_0)}{h}$$

GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR EN UN PUNTO

Sea $f: D\underline{c}R^2 \rightarrow R$ llamamos de esta forma al vector cuyas componentes son las derivadas parciales:

$$\overline{\nabla} f(\overline{X}_0) = \left(f'x(\overline{X}_0); f'y(\overline{X}_0)\right)$$

Si $f: D\underline{c}R^3 \rightarrow R$

$$\overline{\nabla} f(\overline{X}_0) = \left(f'x(\overline{X}_0); f'y(\overline{X}_0); f'z(\overline{X}_0)\right)$$

Observaciones:

(1) Si $f: D\underline{c}R^2 \rightarrow R$ el gradiente es perpendicular a cada curva de nivel de dicho campo en $\overline{X}_0$.

(2) Si $f: D\underline{c}R^3 \rightarrow R$ el gradiente es normal a cada superficie de nivel de dicho campo en $\overline{X}_0$.

PROPIEDAD DE HOMOGENEIDAD

Si existe la derivada direccional $f'\left(\overline{X_0}, \breve{v}\right)$ y $k \in R, k \neq 0$ entonces $f'\left(\overline{X_0}, k\breve{v}\right) = kf'\left(\overline{X_0}, \breve{v}\right)$

Demostración:

$$f'\left(\overline{X_0}, k\breve{v}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f'\left(\overline{X_0} + k\breve{v}\right) - f\left(\overline{X_0}\right)}{h}$$

$$f'\left(\overline{X_0}, k\breve{v}\right) = k \lim_{h\to 0} \frac{f'\left(\overline{X_0} + k\breve{v}\right) - f\left(\overline{X_0}\right)}{kh}$$

Si $h_2 = kh$ como $h \to 0$ sabemos que $h_2 \to 0$

$$f'\left(\overline{X_0}, k\breve{v}\right) = k \lim_{h_2\to 0} \frac{f'\left(\overline{X_0}, +\breve{v}\right) - f\left(\overline{X_0}\right)}{h_2}$$

$$f'\left(\overline{X_0}, k\breve{v}\right) = k\, f'\left(\overline{X_0}, \breve{v}\right)$$

Corolarios:

1. $f'\left(\overline{X_0}, -\breve{v}\right) = -f'\left(\overline{X_0}, \breve{v}\right)$
2. $f'\left(\overline{X_0}, \bar{v}\right) = \|v\| f'\left(\overline{X_0}, \breve{v}\right)$ donde $\breve{v} = \dfrac{\vec{v}}{\|v\|}$

DEFINICIÓN DE DIFERENCIABILIDAD

Decimos que $f: D\underline{c}R^2 \to R$ es diferenciable en un punto interior $\overline{X_0}$ si se cumple: $f(x_0 + h; y_0 + k) - f(x_0; y_0) \cong F'_x\ \overline{(X_0)}h + F'_y\ \overline{(X_0)}k + \epsilon(h,k)\sqrt{h^2 + k^2}$

Donde $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon(h,k) = 0$

Lo que es lo mismo:

$$f(\overline{X_0} + \bar{v}) - f(\overline{X_0}) = \overline{\nabla} f(\ \overline{X_0})\bar{v} + \in (\bar{v})\left|\left|\bar{v}\right|\right|$$

Donde $\lim_{\bar{v}\to\bar{0}} (\in (\bar{v})) = 0$

OBSERVACIÓN:

Si tuviéramos una función escalar de una variable independiente diríamos que f es diferenciable en X_0<=> f es derivable en X_0. Mientras que para funciones de más de una variable independiente esto ya no es cierto.
La continuidad de un campo escalar así como la derivabilidad del mismo respecto de toda dirección son condiciones necesarias pero no suficientes para que el campo escalar termine siendo diferenciable en dicho punto.

DEMOSTRACIÓN: SI ES DIFERENCIABLE ES CONTINUO

Si $f: D \underline{c} R^n \rightarrow R$ es diferenciable en $\overline{X_0}$ interior al Df => f es continuo en $\overline{X_0}$.

Demostración:

Por ser f diferenciable en $\overline{X_0}$ existe un entorno del punto $\overline{X_0}$ en el cual se verifica:

$$f(\overline{X_0} + \bar{v}) - f(\overline{X_0}) = \overline{\nabla} f(\overline{X_0})\bar{v} + \in (\bar{v})\left|\left|\bar{v}\right|\right| \text{ Donde } \lim_{\bar{v}\rightarrow\bar{0}}(\in (\bar{v})) = 0$$

siendo $\bar{v}$ el vector incremento $\therefore$ $f(\overline{X_0} + \bar{v}) = f(\overline{X_0}) + \overline{\nabla} f(\overline{X_0})\bar{v} + \in (\bar{v})\left|\left|\bar{v}\right|\right|$

Pasando al límite cuando $\bar{v} \rightarrow \bar{0}$ y teniendo en cuenta que el límite del primer miembro existirá si existe el límite del segundo miembro, pasamos a fundamentar lo siguiente:

(a) Como $\overline{X_0} \in Df$, existe $f(\overline{X_0})$ y el $\lim_{\bar{v}\rightarrow\bar{0}} f(\overline{X_0}) = f(\overline{X_0})$ dado que es un número real.

(b) Las componentes del $\overline{\nabla} f(\overline{X_0})$ existen dado que f es diferenciable en $\overline{X_0}$ y no dependen de $\bar{v}$, por lo tanto $\lim_{\bar{v}\rightarrow\bar{0}}(\overline{\nabla} f(\overline{X_0})\,\bar{v}) = 0$

(c) $\lim_{\bar{v}\rightarrow\bar{0}}(\in (\bar{v})||\bar{v}||) = 0$ dado que por un lado $\in\rightarrow 0$ por hipótesis y que el $\lim_{\bar{v}\rightarrow\bar{0}}(||\bar{v}||) = 0$.

Por todo lo expuesto se tiene que existe $\lim_{\bar{v}\rightarrow\bar{0}} f(\overline{X_0} + \bar{v}) = f(\overline{X_0})$ =>
f es continua en $\overline{X_0}$

DEM: SI ES DIFERENCIABLE ES DERIVABLE PARA TODA DIRECCIÓN

Si $f: D \underline{c} R^n \to R$ es diferenciable en $\overline{X_0}$ interior al Df => f es derivable en $\overline{X_0}$ respecto de toda dirección.

Demostración:

Por ser f diferenciable en $\overline{X_0}$ existe un entorno del punto $\overline{X_0}$ en el cual se verifica:

$f(\overline{X_0} + \bar{v}) - f(\overline{X_0}) = \bar{\nabla} f(\overline{X_0})\bar{v} + \in(\bar{v})\|\bar{v}\|$ Donde $\lim_{\bar{v}\to\bar{0}}(\in(\bar{v})) = 0$

siendo $\bar{v}$ el vector incremento $\therefore$ $f(\overline{X_0} + \bar{v}) = f(\overline{X_0}) + \bar{\nabla} f(\overline{X_0})\bar{v} + \in(\bar{v})\|\bar{v}\|$

Si de los infinitos puntos del entorno, seleccionamos aquellos para los cuales $\bar{v} = h\breve{u}$ es decir que se consideran los puntos que se hallan en las rectas que pasan por $\overline{X_0}$ y tienen la dirección de cada $\breve{u}$, se tiene:

$$f(\overline{X_0} + h\breve{u}) - f(\overline{X_0}) = \bar{\nabla} f(\overline{X_0})h\breve{u} + \in(h\breve{u})\|h\breve{u}\|$$

Dividiendo por h ambos miembros nos queda:

$$\frac{f(\overline{X_0} + h\breve{u}) - f(\overline{X_0})}{h} = \bar{\nabla} f(\overline{X_0})\breve{u} + \in(h\breve{u})\frac{|h|}{h} \text{ pues } \|\breve{u}\| = 1$$

Pasando al límite cuando $\bar{h} \to \bar{0}$ y teniendo en cuenta que el límite del primer miembro (que es por definición la derivada direccional de f en X_0) existirá si existe el límite del segundo miembro, pasamos a fundamentar lo siguiente:

Las componentes del $\bar{\nabla} f(\overline{X_0})$ existe dado que f es diferenciable en $\overline{X_0}$ y no dependen de h, por lo tanto $\lim_{h\to 0}(\bar{\nabla} f(\overline{X_0})\breve{u}) = k \in R$

Por otra parte $\lim_{h\to 0} \in(h\breve{u})\frac{|h|}{h} = 0$ por ser el caso de producto de infinitésimos

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(\overline{X_0} + h\breve{u}) - f(\overline{X_0})}{h} = \bar{\nabla} f(\overline{X_0})\breve{u}$$

=> Existe $f'(\overline{X_0} + h\breve{u}) / \ f(\overline{X_0} + h\breve{u}) = \bar{\nabla} f(\overline{X_0})\breve{u}$

DEDUCCIÓN DEL PLANO TANGENTE A LA GRÁFICA

Si f es diferenciable en (x_0, y_0)su superficie gráfica tiene la ecuación cartesiana $z = f(x, y)$ o bien $0 = f(x, y) - z$

$f(x, y) - z = 0$ A dicha ecuación la podemos considerar como la ecuación de la superficie de nivel 0” correspondiente a un campo escalar de tres variables de la forma:

$F: D \underline{c} R^3 \to R /\ F(x, y, z) = f(x, y) - z$

El $\overline{\nabla} f(\bar{x}) = (F' x, F' y, F' z) => \overline{\nabla} f(\bar{x}) = \left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\right) = \vec{n}$

$$\alpha: f'_x(x_0, y_0)x + f'_y(x_0, y_0)y - z + D = 0$$

Como (x_0, y_0, z_0) verifican la ecuación del plano:

$$\alpha: f'_x(x_0, y_0)x_0 + f'_y(x_0, y_0)y_0 - z_0 + D = 0$$
$$D = z_0 - f'_x(x_0, y_0)x_0 - f'_y(x_0, y_0)y_0$$

Finalmente:

$$\alpha: f'_x(x_0, y_0)x + f'_y(x_0, y_0)y - z + \left\{z_0 - f'_x(x_0, y_0)x_0 - f'_y(x_0, y_0)y_0\right\} = 0$$

DEFINICIÓN DE PUNTO REGULAR DE UNA CURVA

$\overline{T_0} \in S$ es punto simple cuando es imagen, a través de $\bar{f}$, de un único $(u_0, v_0) \in D$

En todo punto $\overline{T_0} \in S$, simple y regular, la superficie admite “plano tangente” y “recta normal”

DEFINICIÓN DE PUNTO REGULAR DE UNA SUPERFICIE

Sea $\bar{f}: D\underline{c}R^2 \to R^3 / \ \bar{f}$ continua en D dado por $\bar{f}(u,v) = (x(u,v); y(u,v); z(u,v))$

Sea $\overline{p_0} \in S \ / \ \overline{p_0} = \bar{f}(u_0; v_0)$

Decimos que $\overline{p_0} \in S$ es punto regular de la superficie según la representación paramétrica dada por $\bar{f}$ en D.

Si $\bar{f}$ es diferenciable en $\bar{A} = (u_0; v_0)$ interior a D y el producto vectorial $\overline{f'_u}(u_0; v_0) \ x \overline{f'_v}(u_0; v_0) \neq \bar{0}$

MATRIZ JACOBIANA ASOCIADA A UN CAMPO VECTORIAL

Recibe este nombre la matriz que tiene por filas el gradiente de cada componente del campo vectorial.

Sea $\bar{g}: D\underline{c}R^n \to R^n / \bar{g}(\bar{X}) = (g_1(\bar{X}); g_2(\bar{X}); \dots .)$

$$D_{\bar{g}} = \begin{pmatrix} g'_{1_x}(\bar{X}) & g'_{1_y}(\bar{X}) & \dots & g'_{1_n}(\bar{X}) \\ g'_{2_x}(\bar{X}) & g'_{2_y}(\bar{X}) & \dots & g'_{2_n}(\bar{X}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g'_{n_x}(\bar{X}) & g'_{n_y}(\bar{X}) & \dots & g'_{n_n}(\bar{X}) \end{pmatrix}$$

TEOREMA: REGLA DE LA CADENA

Dada:

$$\bar{g}: D\underline{c}R^n \to R^m \ \ \bar{g} \text{ diferenciable en } \bar{A} \in D$$
$$f: D\underline{c}R^m \to R \ \ \ f \text{ diferenciable en } \bar{g}_{(\bar{A})}$$

Entonces: $h = F_O \bar{g}$ es diferenciable en $\bar{A}$ y además:

$$Dh(\bar{A}) = Df(\bar{g}_{(\bar{A})}) \ D\bar{g}_{(\bar{A})}$$

Funciones Implícitas

Dada un campo escalar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ se dice que la función define en forma implícita a $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in DcR^n$ cuando:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) = 0 \ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$$

De poderse despejar de la ecuación inicial $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la forma explícita de expresar "y" como función de las otras variables.

Teorema de Couchy-Dinni

Dada $F: D\underline{c}R^3 \to R, F \in C^1$ / $F(\overline{A}) = 0$ y $F'_z(\overline{A}) \neq 0 \Rightarrow$ la funcion de ecuación: $F(x, y, z) = 0$ define de forma implicita a la ecuación $z = f(x, y)$ y además:

$$f'_x = -\frac{F'x(x_0, y_0, z_0)}{F'z(x_0, y_0, z_0)}$$

$$f'_y = -\frac{F'y(x_0, y_0, z_0)}{F'z(x_0, y_0, z_0)}$$

Curva y Superficies definidas en forma implicita

Curva plana definida en forma implícita (en el plano xy)

Dada la ecuación: $F(x, y) = 0$ y el punto $\overline{A} = (X_0, Y_0)$
Cuando:

1) $f_{(\overline{A})} = 0$
2) $\overline{\nabla} f_{(\overline{A})}$ continua en $E(\overline{A})$
3) $\overline{\nabla} f_{(\overline{A})} \neq \overline{0}$

La ecuación $F(x, y) = 0$ define implícitamente una curva C que pasa por $\overline{A} = (X_0, Y_0)$ y admite recta tangente en $\overline{A}$

Superficie definida en forma implícita

Dada la ecuación: $F(x,y,z)=0$ y el punto $\overline{A}=(X_0,Y_0,Z_0)$

Donde:

1) $f_{(\overline{A})}=0$
2) $\overline{\nabla}f_{(\overline{A})}$ continua en $E(\overline{A})$
3) $\overline{\nabla}f_{(\overline{A})}\neq\overline{0}$

La ecuación $F(x,y,z)=0$ define implícitamente una superficie "S" que pasa por $\overline{A}=(X_0,Y_0,Z_0)$ y admite plano tangente y recta normal en $\overline{A}$

Nota: El gradiente de una función implícita, ya sea que defina una superficie o una curva, siempre es normal a la misma.

DEFINICIÓN EXTREMOS RELATIVOS & ABSOLUTOS

Extremos relativos o locales.

Dada $f: D\underline{c}R^n\rightarrow R, \overline{A}\in D$. Se dice que $f(\overline{A})$ es máximo local de f si $f(\overline{A})\geq f(\overline{X})\forall\overline{X}\in E'(\overline{A})$

Dada $f: D\underline{c}R^n\rightarrow R, \overline{A}\in D$. Se dice que $f(\overline{A})$ es mínimo local de f si $f(\overline{A})\leq f(\overline{X})\forall\overline{X}\in E'(\overline{A})$

Extremos absolutos.

Dada $f: D\underline{c}R^n\rightarrow R, \overline{A}\in D$. Se dice que $f(\overline{A})$ es máximo absoluto de f si $f(\overline{A})\geq f(\overline{X})\forall\overline{X}\in D$

Dada $f: D\underline{c}R^n\rightarrow R, \overline{A}\in D$. Se dice que $f(\overline{A})$ es mínimo absoluto de f si $f(\overline{A})\leq f(\overline{X})\forall\overline{X}\in D$

DEFINICIÓN EXTREMOS CONDICIONADOS

Sean F y G dos campos escalares diferenciables en un entorno de $\overline{X_0} = (x_0, y_0, z_0)$ con derivadas no nulas simultáneamente. Si $\overline{X_0} = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto crítico de f en el conjunto $A = \{(x, y, z)/G(x, y, z) = 0\}$ entonces existe un $\lambda_0/(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es punto crítico de $L(x, y, z, \lambda) = F(x, y, z) + \lambda G(x, y, z)$

Clasificación de extremos:

$$\vec{H}(x, y, \lambda) = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & G''_{x} \\ L''_{yx} & L''_{yy} & G''_{Y} \\ G''_{x} & G''_{Y} & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} > 0\ máximo \\ < 0\ mínimo \\ = 0 \text{ el criterio no informa} \end{cases}$$

CALCULO DE EXTREMOS PARA EL CASO $F: D \subset R^2 \rightarrow R$

Si f es diferenciable en $\overline{X}_0$(interior al Df) con $\overline{\nabla} f(\overline{X}_0) = \overline{0}$ y además:

$$H(\overline{X}_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(\overline{X}_0) & f''_{xy}(\overline{X}_0) \\ f''_{yx}(\overline{X}_0) & f''_{yy}(\overline{X}_0) \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow f(x_0, y_0) \text{ es extremo relativo.}$$

Si en particular: $f''_{xx}(\overline{X}_0) > 0 \Rightarrow f(x_0, y_0)$ es mínimo relativo.

Si en particular: $f''_{xx}(\overline{X}_0) < 0 \Rightarrow f(x_0, y_0)$ es máximo relativo.

$$H(\overline{X}_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(\overline{X}_0) & f''_{xy}(\overline{X}_0) \\ f''_{yx}(\overline{X}_0) & f''_{yy}(\overline{X}_0) \end{vmatrix} < 0$$

F no presenta extremos relativos se trata de un punto de ensilladura de coordenadas (x_0, y_0, z_0) con $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$H(\overline{X}_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(\overline{X}_0) & f''_{xy}(\overline{X}_0) \\ f''_{yx}(\overline{X}_0) & f''_{yy}(\overline{X}_0) \end{vmatrix} = 0$$

El criterio no informa.

EXISTENCIA DE EXTREMOS ABSOLUTOS

Si f continua en S cerrada y acotada, f produce máximo y minimo absoluto (sentido amplo en S)

TAYLOR PARA CAMPOS ESCALARES

Sea $f: D\underline{c}R^n \to R$, si $f \in C^1\left(E(\overline{A})\right)$, para todo $(\overline{A}+\overline{H}) \in E(\overline{A})$ se puede expresar:

$$f(\overline{A}+\overline{H}) = f(\overline{A}) + \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{d^i f(\overline{A},\overline{H})}{i!}\right] + T$$

Siendo T el termino complementario, error o resto.

Aproximar por Taylor de orden K consiste en despreciar el valor de T aceptando que:

$$\boxed{f(\overline{A}+\overline{H}) \cong f(\overline{A}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{d^i f(\overline{A},\overline{H})}{i!}}$$

Para $\overline{A}+\overline{H} = \overline{X} \in E(\overline{A})$

Desde el punto de vista práctico conviene llamar: $\overline{X} = \overline{A}+\overline{H} => \overline{H} = \overline{X}-\overline{A}$

Con lo que nos queda:

$$f(\overline{x}) = f(\overline{A}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{d^i f(\overline{A},\overline{X}-\overline{A})}{i!} \text{ CON } \overline{X} \in E(\overline{A})$$

Siendo:

$$\overline{X}-\overline{A}$$
$$(X_1, X_2, \dots, X_n) - (A_1, A_2, \dots, A_n)$$
$$\overline{X}-\overline{A} = (X_1 - A_1, X_2 - A_2, \dots, X_n - A_n)$$

$$d^i f(\overline{A},\overline{X}-\overline{A}) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(X_1 - A_1) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}(X_n - A_n)\right]_{f(\overline{A})}^{(i)}$$

Si $f \in C^{k+1}E(\overline{A})$ y quisiéramos obtener el valor del resto del polinomio de Taylor (tema no evaluado en la materia) entonces el mismo se puede expresar como:

$$\boxed{T = \frac{d^{k+1}f(\overline{B}, \overline{X} - \overline{A})}{(\kappa + 1)!}}$$

Campo de gradientes. Líneas equipotenciales

Sea $\bar{f}(x,y) = (P(x,y); Q(x,y))$ Si $\bar{f}$ es de clase 1 $(f \in c^1)$ en todo punto de un recinto simplemente conexo y $P'y = Q'x \Rightarrow \bar{f}$ es campo de gradientes.

Cuando el campo vectorial $\bar{f}$ es un campo de gradientes la circulación del mismo es independiente del camino que conecta el punto inicial "t_1" y el punto final "t_2"

Cond. Necesaria para la existencia de función Potencial

Enunciado:

Sea $\bar{f}: D\underline{c}R^2 \to R^2 / \bar{f}(x,y) = (P(x,y); Q(x,y))$ Un campo vectorial derivable con continuidad en un recinto simplemente conexo. Si $\bar{f}$ admite función potencial

$$\Rightarrow P'y = Q'x$$

Demostración:

Por hipótesis $\exists U(x,y) / \overline{\nabla} U(x,y) = \bar{f}$

$$\Rightarrow U'x = P \wedge U'y = Q$$
$$\Rightarrow P'y = U''xy \wedge Q'x = U''yx$$

Como por hipótesis $P'y$ y $Q'x$ son continuas entonces también son continuas $U''xy \wedge U''yx =>$ Por el teorema de Schwanz podemos asegurar que

$$U''xy = U''yx$$
$$=> P'y = Q'x$$

<u>INDEPENDENCIA DEL CAMINO. ENUNCIADO Y DEMOSTRACIÓN</u>

<u>Enunciado:</u>

Si $\bar{f}$ es campo de gradientes $=> \int_C \bar{f}\, d\bar{g}$ es independiente del camino que une el punto inicial "A" y el punto final "B" de la curva "C" $=> \int_{\bar{A}}^{\bar{B}} \bar{f}\, d\bar{g} = U(\bar{B}) - U(\bar{A})$ siendo U el campo escalar $/\bar{\nabla} U = \bar{f}$

Si en particular $\oint \bar{f}\, d\bar{g} = 0 \forall C \text{ cerrada}$

<u>Demostración:</u>

$$\int_C \bar{\nabla} U\, d\bar{g} = \int_a^b \bar{\nabla} U[\bar{g}(t)]\,.\,\bar{g}'(t)dt$$

Si llamamos $h(t) = U[\bar{g}(t)]$ dicha función compuesta tendrá por derivada: $h'(t) = \bar{\nabla} U[\bar{g}(t)].\,\bar{g}'(t)$ (por regla de la cadena) y teniendo en cuenta que $h(t)$ es continua en [a,b] entonces:

$$\int_C \bar{\nabla} U\, d\bar{g} = \int_a^b \bar{\nabla} U[\bar{g}(t)]\,.\,\bar{g}'_{(t)}dt = \int_a^b h'(t)dt = h(t)|_a^b =$$

$$= h(b) - h(a)$$
$$= U[\bar{g}(b)] - U[\bar{g}(a)]$$
$$= U(\bar{b}) - U(\bar{a})$$

En particular si: $\bar{a} = \bar{b} => \oint_C \bar{\nabla} U\, d\bar{g} = 0$

LÍNEAS DE CAMPO

Dado un campo vectorial $\bar{f}$ se llaman líneas de campo a las curvas que en $\bar{f}$ le es tangente.

Si $\bar{X} = \bar{g}(t)$ es la ecuación vectorial de las líneas de campo se tiene $\bar{f}(\bar{g}(t)) = \bar{g}'(t)$

Para hallar las líneas de campo:

$$\boxed{\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}}$$

Siendo $\bar{f}(x,y) = (P(x,y); Q(x,y))$

Nota:

Si $\bar{f}$ es campo de gradientes(es decir que admite potencial "U") se tiene que las líneas de campo tienen por trayectorias ortogonales a las líneas equipotenciales.

T. DEL CAMBIO DE VARIABLE. JACOBIANO DE PASAJE

Sean D y D* dos regiones elementales del plano y una transformación C^1 inyectiva $\vec{T}$:D*→D / $\vec{T}$ (D*)=D definida por $\vec{T}$ (u;v)= (x (u;v);y (u;v))

Entonces para cualquier función integrable F:D→R es integrable en D, resulta:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R^*} f\big(x(u,v); y(u,v)\big)|j|dudv$$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Donde:

$$j = \begin{vmatrix} x'u & x'v \\ y'u & y'v \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u'x & u'y \\ v'x & v'y \end{vmatrix}}$$

TEOREMA DE GREEN

Sea $\bar{f}: D \underline{c} R^2 \to R^2 / \bar{f}(x,y) = \big(P(x,y); Q(x,y)\big)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en un conjunto abierto $D \underline{c} R^2$, entonces:

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{g} = \iint_R (Q'x - P'y) dxdy}$$

Donde R es una región del plano limitado por la curva "C" cerrada y orientada en sentido positivo, de modo tal que R y C están incluidas en D, siendo $\bar{g}$ la función vectorial que parametriza a la curva "C".

CALCULO DE ÁREA CON TEOREMA DE GREEN

Para realizar esta demostración elijo:

$$\bar{f}(x,y) = (-y, x)$$

Demostración:

$$\oint_C \bar{f} d\bar{g} = \iint_R (Q'x - P'y) dxdy$$

$$\oint_C \bar{f} d\bar{g} = \iint (1 - (-1)\, dxdy$$

$$\oint_C \bar{f} d\bar{g} = 2\left\{\iint_R dxdy\right\}$$

$$\frac{1}{2}\oint_C \bar{f} d\bar{g} = A(R)$$

FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL POR DEFINICIÓN

Se define flujo de un campo vectorial $\bar{f}$ a través de una superficie al número real dado por:

$$\boxed{\phi = \int_S \bar{f}\,\breve{n}\,ds}$$

Donde: $\breve{n} = \frac{\bar{\nabla} f}{\|\bar{\nabla} f\|}$ siendo $ds = \frac{\|\bar{\nabla} f\|}{|F'z|} dxdy$

$$\boxed{\phi = \iint_R \bar{f}\breve{n}ds = \iint_R \bar{f}\frac{\bar{\nabla} f}{\|\bar{\nabla} f\|}\frac{\|\bar{\nabla} f\|}{|F'z|} dxdy}$$

TEOREMA DE GAUSS O DE LA DIVERGENCIA

Sea $\bar{f}: D\underline{c}R^3 \rightarrow R^3 / \bar{f}(x,y,z) = (P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z))$ un campo vectorial cuyas componentes admiten derivadas parciales continuas en un sólido V limitado por una superficie cerrada “S” orientable, si esta superficie está compuesta por un numero finito de partes en cada una de las cuales existe y varia con continuidad el versor normal $\breve{n}$ dirigido hacia el exterior del solido V entonces la divergencia de $\bar{f}$ a en el sólido V es igual al flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie S cerrada.

$$\boxed{\iiint_V div\bar{f}\; dv = \int_S \bar{f}\;\breve{n}\;\; ds}$$

TEOREMA DE STOKES

Sea un campo vectorial $\bar{\mathrm{f}}: \mathrm{D} \underline{\mathrm{c}} \mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}^3$ con derivadas parciales continuas, sea S una superficie abierta orientable imagen de un campo vectorial $\vec{\varphi}: B \rightarrow A$ con derivadas continuas y no simultáneamente nulas limitadas por una curva regular C. Tenemos que la circulación de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada es igual al flujo del rotor del campo a través de cualquier superficie limitada por la curva si la orientación de la curva coincide con la de la superficie.

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{\mathrm{f}}\, \mathrm{d}\bar{\mathrm{g}} = \int_S rot\ \bar{\mathrm{f}}\, \breve{\mathrm{n}}\, \mathrm{ds}}$$

Realizado por: Pose, Fernando.